

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

**DÂY LẶP KHÔNG GIẢN
TRONG KHÔNG GIAN W - HYPERBOLIC LỒI ĐỀU**

Hà Nội - 2019

Mục lục

Lời nói đầu	2
1 Một số kiến thức chuẩn bị	3
2 Không gian UCW - hyperbolic	5
3 Dãy lặp Krasnoselki - Mann	8

Lời nói đầu

Lý thuyết điểm bất động có một vai trò đặc biệt trong toán học. Nó có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng, giải tích số, ... Bên cạnh việc nghiên cứu sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ, người ta cũng nghiên cứu các thuật toán, các sơ đồ lặp để tìm kiếm và xây dựng các dãy điểm bất động xấp xỉ của ánh xạ. Đây là một vấn đề quan trọng có nhiều ứng dụng trong thực tế.

Báo cáo trình bày những kiến thức về không gian UCW - hyperbolic và dãy lặp Krasnoselki - Mann.

Báo cáo được chia thành các chương sau:

Chương 1. Không gian UCW - hyperbolic.

Chương 2. Dãy lặp Krasnoselki - Mann.

Chương 3. Tốc độ tiệm cận đều của dãy lặp Ishikawa.

Hà Nội, ngày 22 tháng 12 năm 2019

Th.S.Nguyễn Thùy Linh

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Định nghĩa 1.1. *Không gian W - hyperbolic (X, d, W) là một không gian metric (X, d) với một ánh xạ lồi $W : X \times X \times [0, 1] \longrightarrow X$ thỏa mãn:*

$$(W1) \ d(z, W(x, y, \lambda)) \leq (1 - \lambda)d(z, x) + \lambda d(z, y)$$

$$(W2) \ d(W(x, y, \lambda), W(x, y, \tilde{\lambda})) = |\lambda - \tilde{\lambda}|d(x, y)$$

$$(W3) \ W(x, y, \lambda) = W(y, x, 1 - \lambda)$$

$$(W4) \ d(W(x, z, \lambda), W(y, w, \lambda)) \leq (1 - \lambda)d(x, y) - \lambda d(z, w)$$

Ánh xạ lồi W được Takahashi xem xét đầu tiên ở đó bộ ba (X, d, W) thỏa mãn (W1) được gọi là không gian metric lồi. Nếu (X, d, W) thỏa mãn (W1) – (W3) thì ta có khái niệm kiểu không gian hyperbolic trong chiều của Goebel và Kirk. Itoh đã xét đến (W4) dưới tên "*điều kiện III*", đã được Reich và Shafrir, và Kirk dùng trong các khái niệm của họ về định nghĩa không gian hyperbolic.

Ví dụ 1.0.1. *Các lớp của không gian W - hyperbolic bao gồm không gian định chuẩn và các tập con lồi của nó, hình cầu Hilbert cũng như không gian $CAT(0)$.*

Định nghĩa 1.2. *Không gian W - hyperbolic (X, d, W) là lồi đều nếu cho $r > 0$*

bất kì và $\epsilon \in (0, 2]$ thì tồn tại $\delta \in (0, 1]$ sao cho với $\forall a, x, y \in X$,

$$\begin{cases} d(x, a) \leq r, \\ d(y, a) \leq r, \\ d(x, y) \geq \epsilon r, \end{cases}$$

$$\implies d\left(\frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y, a\right) \leq (1 - \delta)r$$

Định nghĩa 1.3. Không gian W - hyperbolic lõi đều với một modul lõi đều được gọi là không gian UCW - hyperbolic.

Định nghĩa 1.4. Cho (X, d) là một không gian metric, (x_n) là dãy con bị chặn trong X và $C \subseteq X$ là tập con khác rỗng của X . Chúng ta định nghĩa các phép hàm :

$$r_m(., (x_n)) : X \longrightarrow [0, \infty), r_m(y, x_n) = \sup\{d(y, x_n)/n \geq m\}$$

với $m \in \mathbb{N}$

$$r(., (x_n)) : X \longrightarrow [0, \infty), r(y, x_n) = \limsup_n d(y, x_n) = \inf r_m(y, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_m(y, x_n)$$

Chương 2

Không gian UCW - hyperbolic

Kết quả sau đây chỉ ra rằng trong trường hợp không gian UCW - hyperbolic đầy đủ thì cũng có những kết quả tốt như trong không gian Banach lồi đều.

Mệnh đề 2.1. *Cho (X, d, W) là một không gian UCW - hyperbolic đầy đủ. Mọi dãy bị chặn trong X có duy nhất một tâm tiệm cận đối với bất kì tập con lồi, đóng, khác rỗng C của X .*

Chứng minh. Cho η là modulo lồi đều đơn điệu. Áp dụng mệnh đề ta có hàm số:

$$r(., (x_n)) : C \longrightarrow [0, \infty)$$

đạt cực tiểu tại một điểm. Qua bổ đề ta chứng minh được rằng:

$$r\left(\frac{1}{2}y \oplus \frac{1}{2}z, (x_n)\right) < \max\{r(y, (x_n)), r(z, (x_n))\}$$

ở đó $y, z \in C, y \neq z$.

Cho $M := \max\{r(y, (x_n)), r(z, (x_n))\} > 0$.

Cho $\epsilon \in [0, 1]$, tồn tại N sao cho $d(y, x_n), d(z, x_n) \leq M + \epsilon \leq M + 1$ với $\forall n \geq N$.

Hơn nữa

$$d(y, z) = \frac{d(y, z)}{M + \epsilon}(M + \epsilon) \geq \frac{d(y, z)}{M + 1}(M + \epsilon)$$

Áp dụng bổ đề ta có: với $\forall n \geq N$

$$d(\frac{1}{2}y \oplus \frac{1}{2}z, (x_n)) \leq (1 - \eta)(M + 1, \frac{d(y, z)}{M + 1})(M + \epsilon)$$

do đó,

$$r(\frac{1}{2}y \oplus \frac{1}{2}z, (x_n)) \leq (1 - \eta)(M + 1, \frac{d(y, z)}{M + 1})(M + \epsilon)$$

Cho $\epsilon \rightarrow 0$ thì:

$$r(\frac{1}{2}y \oplus \frac{1}{2}z, (x_n)) \leq (1 - \eta)(M + 1, \frac{d(y, z)}{M + 1})M < M.$$

□

Định nghĩa 2.1. Cho $T : C \rightarrow C$. Kí hiệu $F(T)$ là tập các điểm bất động của T . Cho $x \in C$ bất kì và với bất kì $\epsilon > 0$ ta kí hiệu

$$Fix_\epsilon(Tx, b) = \{y \in C / d(x, y) \leq b, d(y, Ty) < \epsilon\}$$

Nếu $x \in C$ và $b > 0$ với $\forall \epsilon > 0$, ta nói rằng T có điểm bất động xấp xỉ trong một lân cận b của x .

Bổ đề 2.1. Các khẳng định dưới đây là tương đương:

- (i) Tồn tại một dãy bị chặn (x_n) trong C sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$;
- (ii) Với $\forall x \in C$ và $\exists b > 0$ sao cho T có dãy điểm bất động xấp xỉ trong một lân cận b của x ;
- (iii) Tồn tại $x \in C$ và $b > 0$ sao cho T có dãy điểm bất động xấp xỉ trong một lân cận b của x .

Định nghĩa 2.2. Giả sử (X, d, W) là một không gian W - hyperbolic $C \subseteq X$ là lồi. Ánh xạ $T : C \rightarrow C$ được gọi là không giãn nếu

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

với mọi $x, y \in C$.

Định nghĩa 2.3. Cho $\lambda \in (0, 1]$ bất kì, ánh xạ trung bình T_λ được định nghĩa là:

$$T_\lambda : C \longrightarrow C, T_\lambda(x) = (1 - \lambda)x \oplus \lambda Tx$$

Ta thấy T_λ không giãn và $F(T) = F(T_\lambda)$.

Thật vậy, với $x, y \in C, \lambda \in (0, 1]; T$ là ánh xạ không giãn thì

$$d(T_\lambda x, T_\lambda y) = d((1-\lambda)x \oplus \lambda Tx, (1-\lambda)y \oplus \lambda Ty) \leq (1-\lambda)d(x, y) + \lambda d(Tx, Ty) = (1-\lambda)d(x, y) + \lambda d(x, y)$$

và

$$d(x, T_\lambda(x)) = d(x, (1 - \lambda)x \oplus \lambda Tx) \leq (1 - \lambda)d(x, x) + \lambda d(x, Tx) = 0$$

Chương 3

Dãy lặp Krasnoselki - Mann

Định nghĩa 3.1. *Dãy lặp Krasnoselki (x_n) bắt đầu với $x \in C$ được định nghĩa như dãy lặp Picard $(T_\lambda^n(x))$ của T_λ :*

$$x_0 := x, x_{n+1} := (1 - \lambda)x_n \oplus \lambda T x_n$$

Tổng quát, dãy con (λ_n) trong $[0, 1]$, ta có được dãy lặp Krasnoselki-Mann (gọi là lặp đoạn Mann) (x_n) bắt đầu với $x \in C$:

$$x_0 := x, x_{n+1} := (1 - \lambda_n)x_n \oplus \lambda_n T x_n$$

Bổ đề sau thu được một số tính chất của phép lặp Krasnoselki-Mann trong không gian W - hyperbolic.

Bổ đề 3.1. *Cho $(x_n), (y_n)$ là dãy lặp Krasnoselki-Mann bắt đầu với $x, y \in C$. Khi đó:*

(i) $(d(x_n, y_n))$ là giảm;

(ii) Nếu p là điểm bất động của T thì $(d(x_n, p))$ là giảm;

(iii) $(d(x_{n+1}, Ty)) \leq d(x_n, y) + (1 - \lambda_n)d(y, Ty)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. (i) Ta có:

$$(d(x_{n+1}, y_{n+1})) \leq (1 - \lambda_n)d(x_n, y_n) + \lambda_n d(Tx_n, Ty_n)$$

Mà $d(Tx_n, Ty_n) \leq d(x_n, y_n)$ nên ta được:

$$(d(x_{n+1}, y_{n+1})) \leq d(x_n, y_n)$$

Do đó $(d(x_n, y_n))$ là giảm;

(ii)

Ta có:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, p) &\leq (1 - \lambda_n)d(x_n, p) + \lambda_n d(Tx_n, p) \\ &= (1 - \lambda_n)d(x_n, p) + \lambda_n d(Tx_n, Tp) \\ &\leq (1 - \lambda_n)d(x_n, p) + \lambda_n d(x_n, p) \\ &= d(x_n, p). \end{aligned}$$

Vậy $(d(x_n, p))$ là giảm.

(iii)

Ta có:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, Ty) &\leq (1 - \lambda_n)d(x_n, Ty) + \lambda_n d(Tx_n, Ty) \\ &\leq (1 - \lambda_n)d(x_n, y) + (1 - \lambda_n)d(Ty, y) + \lambda_n d(x_n, y) \\ &\leq d(x_n, y) + (1 - \lambda_n)d(y, Ty). \end{aligned}$$

□

Định lý 3.1. Cho (X, d, W) là một không gian UCW - hyperbolic đầy đủ, C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của X và $T : C \longrightarrow C$ không giãn. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

(i) T có điểm bất động;

(ii) Tồn tại dãy bị chặn (u_n) trong C sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, Tu_n) = 0$;

(iii) Dãy xấp xỉ Picard $(T^n x)$ bị chặn với $x \in C$;

(iv) Dãy xấp xỉ Picard $(T^n x)$ bị chặn với mọi $x \in C$;

(v) Dãy xấp xỉ Krasnoselki-Mann (x_n) bị chặn với $x \in C$ và cho (λ_n) trong $[0, 1]$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

(a) $\lambda_n = \lambda \in [0, 1]$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 1$;

(c) $\limsup_n \lambda_n < 1$ và $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < \infty$ trung bình;

(vi) Dãy xấp xỉ Krasnoselki-Mann (x_n) bị chặn với mọi $x \in C$ và mọi (λ_n) trong $[0, 1]$.

Chứng minh. (i) \rightarrow (ii)

Cho p là điểm bất động của T và $u_n := p$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Khi đó ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, Tu_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(p, Tp) = d(p, Tp) = 0$$

(ii) \rightarrow (i)

Do dãy (u_n) bị chặn trong C nên theo mệnh đề trên thì (u_n) có duy nhất một tâm tiệm cận c đối với C . Với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì ta có:

$$d(Tc, u_n) \leq d(Tc, Tu_n) + d(Tu_n, u_n) \leq d(c, u_n) + d(u_n, u_n)$$

Áp dụng bổ đề với $y := Tc$, $p := N := 0$, $\alpha_n := 1$, $\beta_n := d(u_n, Tu_n)$ ta được:

$$d(Tc, u_n) \leq d(c, u_n) + d(u_n, Tu_n)$$

$\Rightarrow Tc = c$. Vậy c là điểm bất động của T .

(i) \rightarrow (iii)

Nếu p là điểm bất động của T thì ta có $T^n p = p$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó dãy lặp xấp xỉ Picard $(T^n x)$ bị chặn với $x \in C$.

(iii) \rightarrow (iv)

$(T^n x)$ bị chặn với $x \in C$ mà T không giãn, nên với $\forall x, y \in C$ thì $d(T^n x, T^n y) \leq d(x, y)$. Suy ra $(T^n x)$ bị chặn với $\forall x \in C$

(iv) \rightarrow (i)

Gọi c là tâm tiệm cận duy nhất của $(T^n x)$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, áp dụng bổ đề với $y := Tc, x_n := T^n x, p := 1, N := 0, \alpha_n := 1, \beta_n := 0$ thì $\forall n \geq 0 (d(Tc, T^{n+1}x) \leq d(c, T^n x) = d(c, T^{n+1}x))$ nên $Tc = c$. Suy ra c là điểm bất động của T .

(i) \rightarrow (vi)

Gọi p là điểm bất động của T .

Khi đó với bất kì $x \in C, \lambda$ trong $[0, 1]$ thì

$$d(x_{n+1}, p) = d(x_{n+1}, Tp) \leq d(x_n, p) + (1 - \lambda_n)d(p, Tp) = d(x_n, p)$$

nên dãy $(d(x_n, p))$ giảm và do đó nó bị chặn bởi $d(x, p)$.

(vi) \rightarrow (v) Hiển nhiên

(v) \rightarrow (i)

(a) Nếu $\lambda_n = \lambda \in (0, 1]$ thì (x_n) là dãy lặp Krasnoselki. Do đó dãy lặp Picard $T_\lambda^n(x)$ của ánh xạ không giãn T_λ .

Áp dụng (iii) \rightarrow (i) và $F(T) = F(T_\lambda)$ ta được T có điểm bất động.

(b) Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 1$ và $c \in C$ là tâm tiệm cận của (x_n) . Theo bổ đề ta có:

$$d(Tc, c_{n+1}) \leq d(c, x_n) + (1 - \lambda_n)d(c, Tc)$$

Áp dụng bổ đề trên với $y := Tc, p := 1, N := 0, \alpha_n := 1, \beta_n := (1 - \lambda_n)d(c, Tc)$ ta được $Tc = c$

□

Hệ quả 3.1. Cho (X, d, W) là không gian W - hyperbolic đầy đủ, $C \subset X$ là tập con lồi, đóng, bị chặn, khác rỗng của X và $T : C \longrightarrow C$ không giãn. Khi đó T có điểm bất động.

Chứng minh. Cố định $x_0 \in C$, xét ánh xạ $T_{\frac{1}{n}} : C \longrightarrow C$ với $T_{\frac{1}{n}}(x) = \frac{1}{n}x_0 \oplus \frac{n-1}{n}Tx$.

Do $T_{\frac{1}{n}}$ là ánh xạ Co nên theo nguyên lí ánh xạ Co - Banach $\exists x_n \in C : T_{\frac{1}{n}}(x_n) = x_n$.

Suy ra $x_n = \frac{1}{n}x_0 \oplus \frac{n-1}{n}Tx_n$.

Lúc đó

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx_n) &= d\left(\frac{1}{n}x_0 \oplus \frac{n-1}{n}Tx_n, Tx_n\right) \\ &\leq \frac{1}{n}d(x_0, Tx_n) + \frac{n-1}{n}d(Tx_n, Tx_n) \\ &\leq \frac{1}{n}d(x_0, Tx_n) + \frac{n-1}{n}d(x_n, x_n) \longrightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Vậy tồn tại dãy (x_n) bị chặn trong C thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$. Áp dụng định lí trên T có điểm bất động. □

Kết luận Báo cáo đã trình bày các kiến thức về dãy lặp Krasnoselki-Mann.

Tài liệu tham khảo

[1] M. Bridson, A. Haefliger, Metric spaces of non-positive curvature, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften vol. 319, Springer-Verlag, 1999

[2] J.A Clarkson, Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396- 414

[3] S. Dhompongsa, B. Panyanak, On ϕ -convergence theorems in spaces, to appear in Computer - Mathematics with.

[4] L. Leustean, Nonexpansive iterates in uniformly convex spaces, math. FA, 2008.

[5] Nguyễn Thị Thanh Hà, “Một số vấn đề về điểm bất động”, NXB ĐH sư Phạm, 2006.